

# Битовые операции в задачах КИМ ЕГЭ по информатике.

## Часть II

К.Ю. Поляков,  
д.т.н., учитель информатики ГБОУ СОШ № 163,  
г. Санкт-Петербург

В данной статье рассматриваются задачи следующего типа (впервые эти задачи появились в КИМ на ЕГЭ 2015 года):

Введём выражение  $M \& K$ , обозначающее поразрядную конъюнкцию  $M$  и  $K$  (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи).

1. Определите наименьшее натуральное число  $a$ , такое что выражение

$$(x \& a = 0) \rightarrow ((x \& 29 = 0) \rightarrow (x \& 43 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

2. Определите наибольшее натуральное число  $a$ , такое что выражение

$$(x \& a \neq 0) \rightarrow ((x \& 29 = 0) \rightarrow (x \& 43 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

Предлагается и обосновывается новый подход к решению таких задач, основанный на идее **А.В. Здвижковой** (г. Армавир).

### Обозначения

Через  $Z_K$  обозначим множество чисел, которые в результате поразрядной конъюнкции с числом  $K$  дают 0:

$$Z_K = \{x: x \& K = 0\}.$$

Соответственно, числа, которые в результате поразрядной конъюнкции с числом  $K$  дают ненулевое значение, составляют множество  $\bar{Z}_K$ :

$$\bar{Z}_K = \{x: x \& K \neq 0\}.$$

Введём утверждения

$$Z_K(x) = (x \in Z_K), \quad \bar{Z}_K(x) = (x \in \bar{Z}_K).$$

Для сокращения записи будем вместо  $Z_K(x)$  и  $\bar{Z}_K(x)$  писать соответственно  $Z_K$  и  $\bar{Z}_K$ .

Нашей целью будет поиск чисел  $a$ , при которых некоторое логическое выражение, зависящее от  $a$ , истинно для любых натуральных значений  $x$ . Будет обозначать через  $A$  выражение  $Z_a(x)$ .

### Два свойства импликации

Сначала докажем два свойства импликации, которые будут нам нужны далее<sup>1</sup>.

**Свойство 1.** Следующее равенство тождественно истинно:

$$A \rightarrow (B + C) = (A \rightarrow B) + (A \rightarrow C)$$

<sup>1</sup> Автору не удалось обнаружить их в известной литературе, хотя они легко доказываются.

*Доказательство.* Представим левую и правую часть равенства через операции ИЛИ и НЕ:

$$A \rightarrow (B + C) = \bar{A} + B + C$$

$$(A \rightarrow B) + (A \rightarrow C) = \bar{A} + B + \bar{A} + C = \bar{A} + B + C$$

В обоих случаях получили одинаковые выражения, что и требовалось доказать.

**Свойство 2.** Следующее равенство тождественно истинно:

$$A \rightarrow (B \cdot C) = (A \rightarrow B) \cdot (A \rightarrow C)$$

*Доказательство.* Представим левую и правую часть равенства через операции ИЛИ и НЕ:

$$A \rightarrow (B \cdot C) = \bar{A} + B \cdot C$$

$$(A \rightarrow B) \cdot (A \rightarrow C) = (\bar{A} + B) \cdot (\bar{A} + C) = \bar{A} + B \cdot C$$

При упрощении второго выражения использован распределительный закон. В результате в обоих случаях получили одинаковые выражения, что и требовалось доказать.

### Математическое обоснование метода

В этом разделе мы докажем несколько утверждений, на которых основан предлагаемый метод решения.

**Утверждение 1.** Пусть логическое выражение  $Z_K$  истинно для некоторого натурального числа  $x$ . Тогда все биты двоичной записи числа  $x$ , соответствующие единичным битам двоичной записи числа  $K$ , нулевые.

*Доказательство.* Пусть  $k_i$  –  $i$ -ый бит числа  $K$  (находящийся в  $i$ -м разряде его двоичной записи) – равен 1. По условию для числа  $x$  истинно логическое выражение

$$Z_K(x) = (x \& K = 0).$$

Тогда в результате конъюнкции с соответствующим  $i$ -м битом двоичной записи числа  $x$ , который обозначим как  $x_i$ , получаем  $x_i \& k_i = 0$ . Поскольку по условию  $k_i = 1$ , это возможно только при  $x_i = 0$ , что и требовалось доказать.

**Утверждение 2.** Логическое выражение  $Z_K \rightarrow Z_M$  истинно для всех  $x$  тогда и только тогда, когда множество единичных битов двоичной записи числа  $M$  входит во множество единичных битов двоичной записи числа  $K$ .

*Доказательство.* Пусть множество единичных битов числа  $M$ :

$$B_M = \{m_1, m_2, \dots, m_q\}$$

входит во множество единичных битов числа  $K$ :

$$B_K = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}$$

и пусть для некоторого  $x$  выполняется условие  $Z_K$ . Это значит, что все биты числа  $x$  с номерами  $k_1, k_2, \dots, k_p$  равны 0. Поскольку любой единичный бит числа  $M$  входит в это множество, истинно также и условие  $Z_M$ .

Предположим обратное: условие  $Z_K \rightarrow Z_M$  истинно для всех  $x$ . Пусть при этом один из единичных битов числа  $M$ , скажем, бит с номером  $m_1$ , не входит во множество  $B_K$ . Это

значит, что для любого числа  $x$ , в котором все биты из множества  $B_K$  равны 0, а бит  $m_1$  равен 1, высказывание  $Z_K$  будет истинно, а  $Z_M$  – ложно, так что высказывание  $Z_K \rightarrow Z_M$  истинно не для всех  $x$ . Получили противоречие, что и доказывает вторую часть утверждения.

**Утверждение 3.** Для любого натурального  $x$  справедливо равенство:

$$(Z_K \cdot Z_M) = Z_{K \text{ or } M},$$

где **or** обозначает поразрядную дизъюнкцию между двоичной записью чисел  $K$  и  $M$ .

*Доказательство.* Обозначим множества единичных битов чисел  $K$  и  $M$  через

$$B_K = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}, \quad B_M = \{m_1, m_2, \dots, m_q\}$$

Пусть одновременно истинны логические выражения  $Z_K$  и  $Z_M$ . Тогда логическое выражение  $Z_N$  истинно для всех  $N$ , у которых множество единичных битов

$$B_N = \{n_1, n_2, \dots, n_w\}$$

таково, что каждый из них входит во множество  $B_K$  или во множество  $B_M$ . В частности, одно из таких чисел – это  $N = K \text{ or } M$ .

Напротив, пусть  $N = K \text{ or } M$ . При этом все единичные биты двоичной записи чисел  $K$  и  $M$  входят во множество  $B_N$ . Из утверждения 2 следует, что одновременно истинны выражения  $Z_K$  и  $Z_M$ , то есть истинно  $Z_K \cdot Z_M$ . Утверждение доказано.

**Утверждение 4.** При любых натуральных числах  $K$  и  $M$  существуют значения  $x$ , при которых логическое выражение  $Z_K \rightarrow \bar{Z}_M$  ложно.

*Доказательство.* Рассмотрим отдельно два случая.

1) Множество единичных битов числа  $M$ ,  $B_M = \{m_1, m_2, \dots, m_q\}$ , входит во множество единичных битов числа  $K$ ,  $B_K = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}$ . Если при этом истинно  $Z_K$ , то все биты числа  $x$  из множества  $B_K$  равны нулю. Среди этих битов не может быть ненулевых. Поэтому высказывание  $Z_K \rightarrow \bar{Z}_M$  ложно для всех  $x$ , для которых истинно  $Z_K$ .

2) Множество  $B_M$  содержит биты, не входящие во множество  $B_K$ . При этом высказывание  $Z_K \rightarrow \bar{Z}_M$  ложно для всех  $x$ , для которых истинно  $Z_K$  и, кроме того, все биты, входящие во множество  $B_M$ , равны нулю.

**Утверждение 5.** При любых натуральных числах  $K$  и  $M$  существуют значения  $x$ , при которых логическое выражение  $Z_K \rightarrow Z_M \cdot \bar{Z}_N$  ложно.

*Доказательство.* Применим доказанное выше свойство 2 импликации:

$$Z_K \rightarrow Z_M \cdot \bar{Z}_N = (Z_K \rightarrow Z_M) \cdot (Z_K \rightarrow \bar{Z}_N)$$

В силу утверждения 4 второй сомножитель,  $Z_K \rightarrow \bar{Z}_N$ , равен нулю хотя бы для некоторых  $x$ , что доказывает утверждение.

**Утверждение 6.** Пусть выражение  $Z_K \rightarrow Z_N$  истинно при любом натуральном  $x$ . Тогда выражение  $Z_K \rightarrow (A + Z_N)$  истинно для всех  $x$  при любом выборе  $a$ .

*Доказательство.* Применим доказанное выше свойство 1 импликации:

$$Z_K \rightarrow (A + Z_N) = (Z_K \rightarrow A) + (Z_K \rightarrow Z_N)$$

Так как второе слагаемое истинно при любых  $x$ , результат не зависит от первого слагаемого, то есть от выбора  $a$ .

**Утверждение 7.** Пусть выражение  $Z_K \rightarrow Z_N$  ложно при некотором натуральном  $x$ . Тогда выражение  $Z_K \rightarrow (A + Z_N)$  истинно для всех  $x$  при условии, что  $Z_K \rightarrow A = 1$ .

*Доказательство.* Применим доказанное выше свойство 1 импликации:

$$Z_K \rightarrow (A + Z_N) = (Z_K \rightarrow A) + (Z_K \rightarrow Z_N)$$

Если первое слагаемое истинно при любых  $x$ , то и левая часть равенства тоже истинна. Что и требовалось доказать.

**Утверждение 8.** Пусть выражение  $Z_K + Z_M$  истинно при некотором натуральном  $x$ . Тогда истинно выражение  $Z_{K \& M}$ .

*Доказательство.* Обозначим множества единичных битов чисел  $K$  и  $M$  через

$$B_K = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}, \quad B_M = \{m_1, m_2, \dots, m_q\}$$

Пусть для некоторого  $x$  истинно одно из логических выражений,  $Z_K$  или  $Z_M$ . Истинность  $Z_K$  означает, что в числе  $x$  биты с номерами  $k_1, k_2, \dots, k_p$  – нулевые, истинность  $Z_M$  означает, что в числе  $x$  биты с номерами  $m_1, m_2, \dots, m_q$  – нулевые. В любом случае биты числа  $x$ , номера которых входят в оба множества, и в  $B_K = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}$ , и в  $B_M = \{m_1, m_2, \dots, m_q\}$ , – нулевые. Соответствующее число можно получить как результат поразрядной операции «И» между числами  $K$  и  $M$ . Утверждение доказано.

Необходимо отметить, что обратное высказывание неверно: если  $Z_{K \& M}$  истинно, то это совершенно не означает, что истинно  $Z_K + Z_M$ . Контрпример: пусть при  $K = 3$  и  $M = 5$  истинно выражение  $Z_{K \& M} = Z_{3 \& 5} = Z_1$ , то есть бит 0 числа  $x$  равен нулю. Этому условию соответствует любое чётное число, например,  $x = 6$ , в котором биты 1 и 2 равны 1, то есть  $Z_K(6) = Z_3(6) = 0$  и  $Z_M(6) = Z_5(6) = 0$ .

**Утверждение 9.** Минимальное натуральное число  $a$ , при котором истинно выражение  $A \rightarrow (Z_K + Z_M)$ , равно  $\min(K, M)$ .

*Доказательство.* Согласно Свойству 1, представим выражение в виде

$$A \rightarrow (Z_K + Z_M) = (A \rightarrow Z_K) + (A \rightarrow Z_M)$$

Как следует из Утверждения 2, при  $A = K$  или  $A = M$  это выражение равно 1 при всех  $x$ , так как, по крайней мере, одно из слагаемых равно 1. Таким образом, при  $a = \min(K, M)$  утверждение верно.

Докажем, что нет меньшего подходящего  $a$ , используя метод «от противного»: пусть существует такое  $a$ , меньшее, чем  $\min(K, M)$ , при котором  $A \rightarrow (Z_K + Z_M) = 1$  для всех натуральных  $x$ .

Поскольку  $a < K$ , двоичная запись числа  $K$  содержит единичные биты, которых нет в двоичной записи числа  $a$  (обозначим это множество битов через  $B_K^0$ ). Поэтому для всех

чисел  $x$ , у которых все единичные биты числа  $a$  также равны 1, но ещё есть единичные биты из множества  $B_K^0$ , получаем  $A \rightarrow Z_K = 1 \rightarrow 0 = 0$ .

Аналогично двоичная запись числа  $M$  содержит единичные биты, которых нет в двоичной записи числа  $a$  (обозначим это множество через  $B_M^0$ ). Поэтому для всех чисел  $x$ , у которых все единичные биты числа  $a$  также равны 1, но ещё есть единичные биты из множества  $B_M^0$ , получаем  $A \rightarrow Z_M = 1 \rightarrow 0 = 0$ . Таким образом, для всех чисел, в двоичной записи которых все единичные биты числа  $a$  равны 0, но есть ещё единичные биты, входящие во множества  $B_K^0$  и  $B_M^0$ , оба слагаемых равны 0, так что все выражение ложно. Что и требовалось доказать.

**Утверждение 10.** Пусть  $Z_K \rightarrow Z_M = 0$ . Тогда  $Z_K \rightarrow (A + Z_M) = 1$  тогда и только тогда, когда  $Z_K \rightarrow A = 1$ .

*Доказательство.* Согласно Свойству 1, представим выражение в виде

$$Z_K \rightarrow (A + Z_M) = (Z_K \rightarrow A) + (Z_K \rightarrow Z_M).$$

Во-первых, если  $Z_K \rightarrow A = 1$ , то сразу  $Z_K \rightarrow (A + Z_M) = 1$ .

Чтобы доказать обратное, рассмотрим слагаемое  $Z_K \rightarrow Z_M$ . Обозначим через  $B_K$  множество единичных битов двоичной записи числа  $K$ , а через  $B_M^0$  – множество единичных битов в двоичной записи числа  $M$ , которые равны 0 в двоичной записи числа  $K$ .

Выражение  $Z_K \rightarrow Z_M$  ложно для всех  $x$ , в двоичной записи которых все биты из множества  $B_K$  равны 0, а среди битов из множества  $B_M^0$  есть единичные. Если для этих значения  $x$  истинно выражение  $Z_K \rightarrow (A + Z_M)$ , то это значит, что для них  $Z_K \rightarrow A = 1$ . Поскольку в двоичной записи всех таких  $x$  все биты из множества  $B_K$  равны нулю, то  $Z_K \rightarrow A = 1$  для всех натуральных  $x$ , что и требовалось доказать.

**Утверждение 11.**  $Z_K \rightarrow (A + \bar{Z}_M) = 1$  тогда и только тогда, когда  $Z_{K \text{ or } M} \rightarrow A = 1$ .

*Доказательство.* Согласно Свойству 1, представим выражение в виде

$$Z_K \rightarrow (A + \bar{Z}_M) = (Z_K \rightarrow A) + (Z_K \rightarrow \bar{Z}_M).$$

Рассмотрим слагаемое  $Z_K \rightarrow \bar{Z}_M$ . Обозначим через  $B_K$  множество единичных битов двоичной записи числа  $K$ , а через  $B_M$  – множество единичных битов в двоичной записи числа  $M$ . Как следует из доказательства Утверждения 4, выражение  $Z_K \rightarrow \bar{Z}_M$  ложно для всех  $x$ , в двоичной записи которых все биты из множеств  $B_K$  и  $B_M$  равны 0. Таким образом, выражение  $Z_K \rightarrow \bar{Z}_M$  ложно тогда, когда истинно  $Z_{K \text{ or } M}$ , и истинно тогда, когда истинно  $\overline{Z_{K \text{ or } M}}$ . Поэтому можно выполнить замену  $Z_K \rightarrow \bar{Z}_M$  на  $\overline{Z_{K \text{ or } M}}$ :

$$\begin{aligned} Z_K \rightarrow (A + \bar{Z}_M) &= (Z_K \rightarrow A) + \overline{Z_{K \text{ or } M}} = \bar{Z}_K + \overline{Z_{K \text{ or } M}} + A \\ &= (Z_K \cdot Z_{K \text{ or } M}) \rightarrow A = Z_{K \text{ or } M} \rightarrow A \end{aligned}$$

Поскольку в силу Утверждения 3 имеем  $Z_K \cdot Z_{K \text{ or } M} = Z_{K \text{ or } M}$ , получаем

$$Z_K \rightarrow (A + \bar{Z}_M) = Z_{K \text{ or } M} \rightarrow A.$$

**Утверждение 12.** Пусть  $Z_K \rightarrow Z_L = 0$ . Тогда  $Z_K \rightarrow (A + Z_L \cdot \bar{Z}_M) = 1$  тогда и только тогда, когда  $Z_K \rightarrow A = 1$ .

*Доказательство.* Представим выражение в виде

$$Z_K \rightarrow (A + Z_L \cdot \bar{Z}_M) = (Z_K \rightarrow A) + (Z_K \rightarrow Z_L \cdot \bar{Z}_M).$$

Во-первых, если  $Z_K \rightarrow A = 1$ , то сразу  $Z_K \rightarrow (A + Z_L \cdot \bar{Z}_M) = 1$ .

Чтобы доказать обратное, рассмотрим второе слагаемое, преобразуя его согласно Свойству 2:

$$Z_K \rightarrow (Z_L \cdot \bar{Z}_M) = (Z_K \rightarrow Z_L) \cdot (Z_K \rightarrow \bar{Z}_M).$$

Предположим, что для некоторого  $a$  выражение  $Z_K \rightarrow A$  ложно при некоторых  $x$ , но  $Z_K \rightarrow (A + Z_L \cdot \bar{Z}_M) = 1$  для всех  $x$ . Поскольку  $Z_K \rightarrow A$  ложно при некоторых  $x$ , двоичная запись числа  $a$  содержит единичные биты, которые равны 0 в двоичной записи числа  $K$ . Так как по условию двоичная запись числа  $L$  содержит единичные биты, которые равны 0 в двоичной записи числа  $K$ , то для значений  $x$ , в двоичной записи которых эти «лишние» биты равны 1, имеем  $Z_K \rightarrow Z_L = 0$ , так что всё выражение равно 0. Получили противоречие. Следовательно,  $Z_K \rightarrow A = 1$ .

**Утверждение 13.** Пусть  $Z_K \rightarrow Z_L = 1$ . Тогда  $Z_K \rightarrow (A + Z_L \cdot \bar{Z}_M) = 1$  тогда и только тогда, когда  $Z_{K \text{ or } M} \rightarrow A = 1$ .

*Доказательство.* Используя доказанные выше утверждения, преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} Z_K \rightarrow (A + Z_L \cdot \bar{Z}_M) &= (Z_K \rightarrow A) + (Z_K \rightarrow Z_L \cdot \bar{Z}_M) = \\ &= (Z_K \rightarrow A) + (Z_K \rightarrow Z_L) \cdot (Z_K \rightarrow \bar{Z}_M). \\ &= (Z_K \rightarrow A) + (Z_K \rightarrow Z_L) \cdot \overline{Z_{K \text{ or } M}} \end{aligned}$$

Поскольку по условию множество единичных битов двоичной записи числа  $L$  является подмножеством множества единичных битов числа  $K$ , то  $Z_K \rightarrow Z_L = 1$  для всех  $x$ . Поэтому выражение далее преобразуется так же, как и при доказательстве Утверждения 11:

$$\begin{aligned} (Z_K \rightarrow A) + \overline{Z_{K \text{ or } M}} &= 1 \\ \bar{Z}_K + A + \overline{Z_{K \text{ or } M}} &= 1 \\ \overline{Z_K \cdot Z_{K \text{ or } M}} + A &= 1 \\ Z_{K \text{ or } M} \rightarrow A &= 1 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

### Общий метод решения

Идея метода решения, предложенная **А.В. Здвижковой**, состоит в следующем:

- 1) упростить логическое выражение так, чтобы свести его к импликации и избавиться от всех инверсий;
- 2) применить утверждения 3-7 с целью свести задачу к форме, в которой можно использовать утверждение 2.

Упрощение может привести к нескольким разным формам выражения, например,

- 1)  $(Z_K \cdot A) \rightarrow Z_N$
- 2)  $Z_K \rightarrow A$
- 3)  $Z_K \rightarrow (A + Z_N)$
- 4)  $Z_K \rightarrow (A \cdot Z_N)$

В первом случае  $Z_K \cdot A = Z_{K \text{ or } a}$ , так что с помощью числа  $a$  можно добавить в левую часть единичные биты числа  $N$ , которых нет во множестве единичных битов числа  $K$ .

Во втором случае согласно утверждению 2 число  $a$  должно быть выбрано так, чтобы все его единичные биты входили во множество единичных битов числа  $K$ .

В третьем случае с помощью утверждений 6 и 7 можно либо свести задачу ко второму случаю, либо придти к выводу от том, что число  $a$  можно выбрать произвольно.

В четвёртом случае решение не всегда существует: с помощью числа  $a$  можно добавить в правую часть единичные биты, но нельзя их убрать. Поэтому если множество единичных битов числа  $N$  не является подмножеством единичных битов числа  $K$ , задача не имеет решения (при любом выборе  $a$  выражение будет ложно при некоторых значениях  $x$ ).

## Примеры

**Пример 1.** Определите наименьшее натуральное число  $a$ , такое что выражение

$$(x \& 53 \neq 0) \rightarrow ((x \& 41 = 0) \rightarrow (x \& a \neq 0))$$

тождественно истинно.

*Решение.* Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде  $\bar{Z}_{53} \rightarrow (Z_{41} \rightarrow \bar{A})$ . Упрощаем выражение, раскрывая импликации по формуле  $A \rightarrow B = \bar{A} + B$ :

$$\bar{Z}_{53} \rightarrow (Z_{41} \rightarrow \bar{A}) = Z_{53} + (Z_{41} \rightarrow \bar{A}) = Z_{53} + \bar{Z}_{41} + \bar{A}$$

Теперь избавляемся от инверсий, применяя закон де Моргана и переходя к импликации:

$$Z_{53} + \bar{Z}_{41} + \bar{A} = (\overline{Z_{41} \cdot A}) + Z_{53} = (Z_{41} \cdot A) \rightarrow Z_{53}.$$

Применяем утверждение 3:

$$(Z_{41} \cdot A) \rightarrow Z_{53} = Z_{41 \text{ or } a} \rightarrow Z_{53}.$$

Таким образом, с помощью числа  $a$  мы должны добавить в левую часть недостающие биты – те, которые есть в двоичной записи числа 53, но отсутствуют в двоичной записи числа 41:

разряды 5 4 3 2 1 0

41 = 101001

53 = 110101

Биты, которые обязательно должны быть в числе  $a$  – это биты в разрядах 4 и 2 (выделены фоном), поэтому минимальное значение числа  $a_{\min} = 2^4 + 2^2 = 20$ . Можно выбрать и любое другое значение  $a$ , в двоичной записи которого эти биты равны 1.

**Пример 2.** Определите наибольшее натуральное число  $a$ , такое что выражение

$$(x \& a \neq 0) \rightarrow ((x \& 20 = 0) \rightarrow (x \& 5 \neq 0))$$

тождественно истинно.

*Решение.* Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде  $\bar{A} \rightarrow (Z_{20} \rightarrow \bar{Z}_5)$ . Упрощаем выражение, раскрывая импликации по формуле  $A \rightarrow B = \bar{A} + B$ :

$$\bar{A} \rightarrow (Z_{20} \rightarrow \bar{Z}_5) = A + (Z_{20} \rightarrow \bar{Z}_5) = A + \bar{Z}_{20} + \bar{Z}_5$$

Теперь избавляемся от инверсий, применяя закон де Моргана и переходя к импликации:

$$A + \bar{Z}_{20} + \bar{Z}_5 = (\overline{Z_{20} \cdot Z_5}) + A = (Z_{20} \cdot Z_5) \rightarrow A.$$

Согласно утверждению 3,  $Z_{20} \cdot Z_5 = Z_{20 \text{ or } 5}$ . Вычисляем

разряды 4 3 2 1 0

$$20 = 10100$$

$$5 = 00101$$

$$20 \text{ or } 5 = 10101 = 21$$

Таким образом, получили  $Z_{21} \rightarrow A = 1$ . Согласно утверждению 2, все единичные биты числа  $a$  должны присутствовать в числе 21. Поэтому максимальное значение  $a_{\max} = 21$ . Кроме того, можно взять и другие значения  $a$ , которые не содержат в двоичной записи других единичных битов, кроме 4-го, 2-го и 0-го (это 1, 4, 5, 16, 17 и 20).

**Пример 3.** Определите наибольшее натуральное число  $a$ , такое что выражение

$$(x \& a \neq 0) \rightarrow ((x \& 12 = 0) \rightarrow (x \& 21 = 0))$$

тождественно истинно.

*Решение.* Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде  $\bar{A} \rightarrow (Z_{12} \rightarrow Z_{21})$ . Упрощаем выражение, раскрывая импликации по формуле  $A \rightarrow B = \bar{A} + B$ :

$$\bar{A} \rightarrow (Z_{12} \rightarrow Z_{21}) = A + (Z_{12} \rightarrow Z_{21}) = A + \bar{Z}_{12} + Z_{21}$$

Теперь избавляемся от инверсий, переходя к импликации:

$$A + \bar{Z}_{12} + Z_{21} = Z_{12} \rightarrow (A + Z_{21}).$$

Согласно свойству 1 импликации,  $Z_{12} \rightarrow (A + Z_{21}) = (Z_{12} \rightarrow A) + (Z_{12} \rightarrow Z_{21})$ . Двоичная запись числа  $21 = 10101_2$  содержит единичные биты, которые не входят во множество единичных битов числа  $12 = 1100_2$ . Поэтому по утверждению 7 задача сводится к обеспечению условия  $Z_{12} \rightarrow A = 1$ .

Согласно утверждению 2, все единичные биты числа  $a$  должны присутствовать в числе 12. Поэтому максимальное значение  $a_{\max} = 12$ . Кроме того, можно взять и другие значения  $a$ , которые не содержат в двоичной записи других единичных битов, кроме 3-го и 2-го (это 4, 8 и 12).

**Пример 4.** Определите наименьшее натуральное число  $a$ , такое что выражение

$$((x \& 28 \neq 0) \vee (x \& 45 \neq 0)) \rightarrow ((x \& 48 = 0) \rightarrow (x \& a \neq 0))$$

тождественно истинно.

*Решение.* Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде  $(\bar{Z}_{28} + \bar{Z}_{45}) \rightarrow (Z_{48} \rightarrow \bar{A})$ . Упрощаем выражение, раскрывая импликации:



$$(\bar{Z}_{28} + \bar{Z}_{45}) \rightarrow (Z_{48} \rightarrow \bar{A}) = \overline{\bar{Z}_{28} + \bar{Z}_{45}} + (Z_{48} \rightarrow \bar{A}) = Z_{28} \cdot Z_{45} + \bar{Z}_{48} + \bar{A}$$

Теперь избавляемся от инверсий, используя закон де Моргана и переходя к импликации:

$$Z_{28} \cdot Z_{45} + \bar{Z}_{48} + \bar{A} = \overline{\bar{Z}_{48} \cdot A} + Z_{28} \cdot Z_{45} = (Z_{48} \cdot A) \rightarrow (Z_{28} \cdot Z_{45})$$

Упрощаем выражение в правой части, используя утверждение 3:  $Z_{28} \cdot Z_{45} = Z_{28 \text{ or } 45}$ . Вычисляем:

разряды 5 4 3 2 1 0

28 = 0 1 1 1 0 0

45 = 1 0 1 1 0 1

28 or 45 = 1 1 1 1 0 1 = 61

Нам нужно обеспечить истинность выражения  $(Z_{48} \cdot A) \rightarrow Z_{61}$  при всех  $x$ . Согласно утверждению 2 для этого необходимо, чтобы множество битов числа 61 входило во множество битов числа 48 **or**  $a$ , то есть с помощью  $a$  мы можем добавить недостающие биты:

разряды 5 4 3 2 1 0

48 = 1 1 0 0 0 0

61 = 1 1 1 1 0 1

Биты, которые обязательно должны быть в числе  $a$  – это биты в разрядах 3, 2 и 0 (выделены фоном), поэтому минимальное значение числа  $a_{\min} = 2^3 + 2^2 + 2^0 = 13$ . Можно выбрать и любое другое значение  $a$ , в двоичной записи которого эти биты равны 1.

**Пример 5.** (А.Г. Гильдин). Определите наибольшее натуральное число  $a$ , такое что выражение

$$(x \& 19 = 0) \wedge (x \& 38 \neq 0) \vee ((x \& 43 = 0) \rightarrow ((x \& a = 0) \wedge (x \& 43 = 0)))$$

тождественно истинно.

**Решение.** Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде  $Z_{19} \cdot \bar{Z}_{38} + (Z_{43} \rightarrow (A \cdot Z_{43}))$ . Упрощаем выражение, приводя его к импликации:

$$Z_{43} \rightarrow ((A \cdot Z_{43}) + (Z_{19} \cdot \bar{Z}_{38}))$$

Согласно свойству 1 импликации,

$$Z_{43} \rightarrow ((A \cdot Z_{43}) + (Z_{19} \cdot \bar{Z}_{38})) = (Z_{43} \rightarrow A \cdot Z_{43}) + (Z_{43} \rightarrow Z_{19} \cdot \bar{Z}_{38})$$

По утверждению 12, второе слагаемое в правой части можно отбросить, поэтому остается обеспечить истинность выражения  $Z_{43} \rightarrow A \cdot Z_{43}$ .

В силу утверждений 3 и 2, множество единичных битов числа  $a$  **or** 43 должно входить во множество единичных битов числа 43. Поэтому число  $a$  может содержать единичные биты только в тех разрядах, где они есть в двоичной записи числа 43. Таким образом,  $a_{\max} = 43$ . Кроме этого, можно использовать и другие значения  $a$ , все единичные биты которых входят во множество единичных битов числа 43: это 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 32, 33, 34, 35, 40, 41, 42 и 43.

**Пример 6.** (М.В. Кузнецова). Определите наибольшее натуральное число  $a$ , такое что выражение

$$((x \& 13 \neq 0) \vee (x \& a \neq 0)) \rightarrow (x \& 13 \neq 0) \vee ((x \& a \neq 0) \wedge (x \& 39 = 0))$$

тождественно истинно.

*Решение.* Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде  $((\bar{Z}_{13} + \bar{A}) \rightarrow \bar{Z}_{13}) + \bar{A} \cdot Z_{39}$ . Упрощаем выражение, раскрывая импликацию:

$$((\bar{Z}_{13} + \bar{A}) \rightarrow \bar{Z}_{13}) + \bar{A} \cdot Z_{39} = \overline{\bar{Z}_{13} + \bar{A}} + \bar{Z}_{13} + \bar{A} \cdot Z_{39} = Z_{13} \cdot A + \bar{Z}_{13} + \bar{A} \cdot Z_{39}$$

Применяем распределительный закон

$$Z_{13} \cdot A + \bar{Z}_{13} = (Z_{13} + \bar{Z}_{13}) \cdot (A + \bar{Z}_{13}) = A + \bar{Z}_{13}$$

Получаем

$$Z_{13} \cdot A + \bar{Z}_{13} + \bar{A} \cdot Z_{39} = A + \bar{Z}_{13} + \bar{A} \cdot Z_{39}$$

Используем распределительный закон ещё раз

$$A + \bar{A} \cdot Z_{39} = (A + \bar{A}) \cdot (A + Z_{39}) = A + Z_{39}$$

так что выражение сводится к  $A + \bar{Z}_{13} + Z_{39}$ . Теперь избавляемся от инверсий, переходя к импликации:

$$A + \bar{Z}_{13} + Z_{39} = Z_{13} \rightarrow (A + Z_{39}).$$

По свойству 1 импликации имеем

$$Z_{13} \rightarrow (A + Z_{39}) = (Z_{13} \rightarrow A) + (Z_{13} \rightarrow Z_{39})$$

Поскольку число  $39 = 100111_2$  содержит единичные биты, которых нет в числе  $13 = 1101_2$ , второе слагаемое,  $Z_{13} \rightarrow Z_{39}$ , равно 0 (ложно для каких-то  $x$ ), поэтому остается обеспечить только равенство  $Z_{13} \rightarrow A = 1$ . В силу утверждения 2, для этого требуется, чтобы двоичная запись числа  $a$  имела единичные биты только там, где есть единичные биты в числе 13. Поэтому  $a_{\max} = 13$ .

Кроме того, условие выполнено при выборе  $a = 1, 4, 5, 8, 9, 12$  и  $13$ . Количество этих решений несложно подсчитать. Число 13 содержит  $m = 3$  ненулевых бита, в числе  $a$  каждый из них может быть равен 0 или 1. Поэтому общее количество возможных комбинаций равно  $2^m$ . Учитывая, что нас интересуют только натуральные числа, нельзя выбрать все эти биты нулевыми, поэтому один вариант исключается. Итог: количество решений на множестве натуральных чисел равно  $2^m - 1$ .

Отметим, что если в этой задаче вместо чисел 13 и 39 взять, например, числа 53 и 21, то выражение истинно при любом выборе  $a$  (см. утверждение 6). Это связано с тем, что все единичные биты числа  $21 = 10101_2$  входят во множество единичных битов числа  $53 = 110101_2$ .

**Пример 7.** Определите наибольшее натуральное число  $a$ , такое что выражение

$$((x \& 46 = 0) \vee (x \& 18 = 0)) \rightarrow ((x \& 115 \neq 0) \rightarrow (x \& a = 0)))$$

тождественно истинно.

*Решение.* Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде  $(Z_{46} + Z_{18}) \rightarrow (\bar{Z}_{115} \rightarrow A)$ . Упрощаем выражение, раскрыв вторую импликацию и избавившись от инверсий:

$$(Z_{46} + Z_{18}) \rightarrow (Z_{115} + A)$$

Преобразуем левую часть согласно Утверждению 8:

$$Z_{46} + Z_{18} \Rightarrow Z_{46 \& 18} = Z_2$$

и получаем таким образом (с помощью свойства 1 импликации)

$$Z_2 \rightarrow (Z_{115} + A) = (Z_2 \rightarrow Z_{115}) + (Z_2 \rightarrow A)$$

Первая импликация в сумме равна 0, так как двоичная запись числа 115 содержит единичные биты, которых нет в двоичной записи числа 2. Поэтому требуется обеспечить истинность второй импликации,  $Z_2 \rightarrow A$ . Для этого множество единичных битов числа  $a$  должно входить во множество единичных битов числа 2 (а это единственный бит в 1-м разряде). Поэтому единственное натуральное число  $a$ , удовлетворяющее условию – это 2.

**Пример 8.** Определите наименьшее натуральное число  $a$ , такое что выражение

$$((x \& 23 \neq 0) \wedge (x \& 45 \neq 0)) \rightarrow ((x \& a \neq 0) \wedge (x \& 23 \neq 0))$$

тождественно истинно.

*Решение.* Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде  $(\overline{Z_{23}} \cdot \overline{Z_{45}}) \rightarrow (\overline{A} \cdot \overline{Z_{23}})$ . Упрощаем выражение, раскрывая импликацию и избавляясь от инверсий:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{Z_{23}} \cdot \overline{Z_{45}}} + \overline{A} \cdot \overline{Z_{23}} &= Z_{23} + Z_{45} + \overline{A} \cdot \overline{Z_{23}} = (Z_{23} + \overline{A}) \cdot (Z_{23} + \overline{Z_{23}}) + Z_{45} = \\ &= Z_{23} + \overline{A} + Z_{45} = A \rightarrow (Z_{23} + Z_{45}) \end{aligned}$$

Преобразуем левую часть согласно Свойству 1 импликации:

$$A \rightarrow (Z_{23} + Z_{45}) = (A \rightarrow Z_{23}) + (A \rightarrow Z_{45}).$$

Таким образом, нужно обеспечить выполнение для всех  $x$  одного из условий:

$$A \rightarrow Z_{23} = 1 \text{ или } A \rightarrow Z_{45} = 1.$$

Первое из них верно при минимальном значении 23, второе – при минимальном значении 45. Поэтому в качестве ответа выбираем наименьшее из двух – 23.

У этой задачи возможно интересное продолжение – давайте найдем **все решения, меньшие 100**. Сначала найдём все решения уравнения  $A \rightarrow Z_{23} = 1$ . Учитывая, что

разряды 6 5 4 3 2 1 0

$$23 = 0010111$$

биты 0, 1, 2 и 4 нужно обязательно сохранить. К ним можно добавить бит 3 (получается  $23+8=31$ ), бит 5 ( $23+32=55$ ), биты 4 и 5 ( $23+32+8=63$ ), бит 6 ( $23+64=87$ ), биты 6 и 3 ( $23+64+8=95$ ), остальные подходящие значения больше 100.

Теперь найдём все решения уравнения  $A \rightarrow Z_{45} = 1$ . Запишем 45 в двоичной системе счисления:

разряды 6 5 4 3 2 1 0

$$45 = 0101101$$

Рассуждая аналогично, добавляем биты 1 ( $45+2=47$ ), 4 ( $45+16=61$ ), 4 и 1 ( $45+16+2=63$ ), остальные значения получаются больше 100.

В итоге получается такой список всех возможных значений  $a$ , меньших 100:

$$23, 31, 45, 47, 55, 61, 63, 87, 95.$$

### ***Литература***

1. К.Ю. Поляков, Множества и логика в задачах ЕГЭ // Информатика, № 10, 2015, с. 38-42.
2. К.Ю. Поляков, Битовые операции в задачах КИМ ЕГЭ по информатике. Электронный ресурс [URL: <http://kpolyakov.spb.ru/download/bitwise.pdf>] Дата обращения: 06.11.2016.